「接続行列を係数にもつ線形方程式」の競プロでの応用

AtCoder: opt,　Twitter: @opt_cp*

Thursday 17th September, 2020

概要

競プロの問題を定式化すると,「グラフの接続行列を係数にもつ線形方程式」を解くことに帰着されることがあります. この PDF では, そのような方程式の解法を説明します. また, 競プロの問題を解く際, そのような方程式がどう現れるかを, 例題を交えて紹介します. (3 節, 4 節はまだ書いていませんが, 好評そうなら書きます.)

目次

* 誤植等の指摘をこちらにいただけると嬉しいです.

1　接続行列を係数にもつ線形方程式

この節では，頂点集合を V，辺集合を E とする有向グラフ $G=(V,E)$ を考えます．G は自己閉路を持たないことを仮定しますが，多重辺を持っても，非連結であってもよいです．

1.1　問題設定

有向グラフ G の接続行列 $B \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は，接続関係を行列で表したものです．行列 B の行が頂点に，列が辺に対応します．頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ に対し，B の (v,e) 成分は

$$b_{ve} := \begin{cases} -1 & \text{if } v \text{ が } e \text{ の始点}, \\ +1 & \text{if } v \text{ が } e \text{ の終点}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義されます[*1]．

接続行列の各列はちょうど一つずつ $+1$ と -1 の成分を持ち，他は 0 です．逆に，そのような条件を満たす行列は「ある有向グラフの接続行列」と見なすことができます．

有向グラフの接続行列はいくつか嬉しい性質を持ちます．この PDF で扱うのは，以下の問題を $O(|V|+|E|)$ 時間で解くことができるという性質です．

問題 1. 接続行列 (と見なせる行列) $B \in \mathbb{R}^{V \times E}$ とベクトル $c \in \mathbb{R}^V$ が与えられる．方程式

$$Bx = c$$

を満たす $x \in \mathbb{R}^E$ は存在するか？　存在するならばそれを一つ求めよ．

$n \times n$ 行列を係数にもつ線形方程式を Gauss の消去法で解くと $O(n^3)$ 時間かかります．それに比べて $O(|V|+|E|)$ は爆速です！

1.2　解法の概要

問題 1 を解くには，以下を用います:

観察 1. G の (辺の向きを無視した) 全域森を任意に一つ選び，その辺集合を $S \subseteq E$ とする．行列 B から S に対応する列のみを取り出した部分行列 $B_S \in \mathbb{R}^{V \times S}$ に対し，$\operatorname{Im} B_S = \operatorname{Im} B$ が成り立つ．

証明はそこまで難しくはないですが，ここでは割愛します．

上の観察から，x の成分のうち，S に対応するもののみ非ゼロであるとしてよいです．さらに，全域森の接続行列において，葉に対応する行は非ゼロ成分をちょうど一つもつことに注意

[*1] ± 1 を逆にして定義することもありますが，符号の違いは本質的ではありません．

すると，葉に対応する行から順に解くことができます．

1.3 具体例

理解を深めるために，上の解法を具体例で確認しましょう．

方程式 $Bx = c$ の例として，次の方程式を考えます:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \text{辺}\,1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{頂点}\,1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & -1 & & \\
1 & -1 & -1 & & -1 & \\
 & & & 1 & & 1 \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}.
$$

有向グラフ G は 5 頂点 6 辺からなります．このグラフの全域森として，例えば辺集合 $S = \{1, 3, 4, 5\}$ を選ぶと，全域森に対応する方程式 $B_S x = c$ は

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{辺}\,1 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{頂点}\,1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-1 & & & \\
 & 1 & -1 & \\
1 & -1 & & -1 \\
 & & 1 & \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}
$$

となります．この時点で $x_2 = x_6 = 0$ とすることが確定します．

頂点 1 は葉なので，第 1 行 $-x_1 = c_1$ には一つの変数 x_1 のみが現れています．この行から，$x_1 = -c_1$ と決まります．これを代入して整理すると，頂点 1 の行と辺 1 の列は消去され，

$$
\begin{bmatrix}
 & & & \\
 & 1 & -1 & \\
 & -1 & & -1 \\
 & & 1 & \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \\ c_2 \\ c_3 + c_1 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}
$$

となります．

同じように，葉である頂点 4 に注目すると，$x_4 = c_4$ と決まります．さらにこれを代入すると

$$
\begin{bmatrix}
 & & & \\
 & 1 & & \\
 & -1 & & -1 \\
 & & & \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_3 \\ \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \\ c_2 + c_4 \\ c_3 + c_1 \\ \\ c_5 \end{bmatrix}
$$

となり... と繰り返すことで，方程式を解くことができます．

以下の 2 点に注意して下さい:

- 頂点と辺がどんどん削除されていきますが，葉は常に 1 つ以上存在します．
- 計算過程で $0 = 1$ といった矛盾した式が生じることがありますが，その場合は方程式に解が無いことが分かります．

1.4 擬似コード

上の解法は，以下のように DFS で実装することができます．

Algorithm 1 問題 1 の解法

1: $x_e \leftarrow 0, \forall e \in E$ ▷ 初期化
2: $\texttt{seen}[u] \leftarrow \texttt{false}, \forall u \in V$
3: **for** $u \in V$:
4:     **if** $\texttt{seen}[u] = \texttt{true}$: **continue**
5:     $y \leftarrow \mathrm{DFS}(u)$ ▷ 関数 DFS は 8 行目に定義される
6:     **if** $y \neq 0$: **return** “no solutions” ▷ 方程式は解を持たない
7: **return** $x = (x_e)_{e \in E}$

8: **function** $\mathrm{DFS}(u)$ ▷ $u \in V$ からたどれる頂点に関する行を消去したあとの，右辺ベクトル第 u 成分を返す関数
9:     $\texttt{seen}[u] \leftarrow \texttt{true}$
10:     $r \leftarrow c_u$
11:     **for** u に接続する辺 $e \in E$:
12:         e の u ではない端点を $v \in V$ とする
13:         **if** $\texttt{seen}[v] = \texttt{true}$: **continue**
14:         $y \leftarrow \mathrm{DFS}(v)$
15:         **if** u が e の始点 : $x_e \leftarrow y$
16:         **if** u が e の終点 : $x_e \leftarrow -y$
17:         $r \leftarrow r + y$
18:     **return** r

ポイントは以下のとおりです:

- 「全域森を一つ選ぶこと」と「葉から解くこと」を同時に行っています．
- DFS の行きがけ時に「全域森を一つ選ぶこと」を，帰りがけ時に「葉から解くこと」を行っています．
- 計算量は先述のとおり $O(|V| + |E|)$ です．

このアルゴリズムは，競プロでしばしば役立つ & 意外と混乱しやすいので，ライブラリ化

しておくのもオススメです．

1.5 mod 2 の場合

競プロでは，問題 1 を mod 2 で解くことが要求される場合も多いです．その場合も，全ての演算を mod 2 で考えれば，全く同じアルゴリズムで解くことが出来ます．

なお，mod 2 の世界では，有向グラフの接続行列 $B = (b_{ve})$ は，単に

$$b_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{if } v \text{ が } e \text{ の端点}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となって，「無向グラフの接続行列」と同じ形になることに注意して下さい．

1.6 不等式の場合

実は，問題 1 の不等式バージョン

問題 2. 接続行列 (と見なせる行列) $B \in \mathbb{R}^{V \times E}$ とベクトル $c \in \mathbb{R}^V$ が与えられる．不等式

$$Bx \leq c$$

を満たす $x \in \mathbb{R}^E$ は存在するか？　存在するならばそれを一つ求めよ．

もほぼ同じアルゴリズムで解くことができます．不等式の場合は，Algorithm 1 の 6 行目の $y \neq 0$ の部分を $y < 0$ にすればよいだけです．興味のある方は考えてみて下さい．

2 例題 1. AGC035: B - Even Degrees

AGC035: B - Even Degrees

2.1 問題概要

N 頂点 M 辺の単純連結無向グラフが与えられる．すべての辺にどちらかの向きをつけて有向グラフを作る．すべての頂点の出次数を偶数にできるか？　可能ならばその一例を構成せよ．

■制約

- $2 \leq N \leq 10^5$
- $N-1 \leq M \leq 10^5$

2.2 解法

与えられた無向グラフを $G=(V,E)$ とします．また，G の各辺を勝手に向き付けて有向グラフとしたものを G' とします．各辺 $e \in E$ に対応する変数 $x_e \in \{0,1\}$ を準備し，

$$x_e = 0 \text{ は「}G'\text{ と同じ向きに }e\text{ を向き付けること」}$$
$$x_e = 1 \text{ は「}G'\text{ と逆向きに }e\text{ を向き付けること」}$$

を表すとします．

「出次数が偶数」という条件から，$x=(x_e) \in \mathbb{R}^E$ に関する線形方程式が立ちそうです．実際，有向グラフ G' の接続行列を $B \in \mathbb{R}^{V \times E}$ とし，ベクトル $c=(c_v) \in \mathbb{R}^V$ を

$$c_v \coloneqq (\text{グラフ } G' \text{ 上での } v \text{ の出次数})$$

と定めると，ベクトル

$$Bx + c$$

の各成分は，x に従って各辺を向き付けたグラフの出次数に等しいです．つまり，線形方程式

$$Bx + c = \mathbf{0}$$

を mod 2 の世界で解いて得られる x が答えです．

Algorithm 1 をライブラリ化しておけば，ほぼコピペするだけで AC することができます！

参考: 提出コード (c++)

3　例題 2. ABC155: F - Perils in Parallel

ABC155: F - Perils in Parallel

これもほぼコピペで解けます．今後書くかも？

4　例題 3. ECR45: F. Flow Control

Educational Codeforces Round 45 (Rated for Div. 2): F. Flow Control

これもほぼコピペで解けます．今後書くかも？